

**FERMAT'S PRINCIPLE LIKE A NON DEFINED EXTREMAL
POINT FOR SPHERICAL MIRRORS**

**EL PRINCIPIO DE FERMAT COMO EXTREMAL NO
DEFINIDO PARA ESPEJOS ESFERICOS**

M.A. PORRAS*, J. ALDA** y E. BERNABEU*
*Departamento de Optica. Universidad Complutense de Madrid.
Facultad de Ciencias Físicas. Ciudad Universitaria, s/n.
28040 Madrid (España).
* Facultad de Ciencias Físicas
** Escuela Universitaria de Optica.*

ABSTRACT

The function that defines the optical path has been analyzed to justify and to set the character of stationarity of the optical path on a real trajectory of light. For a spherical mirror, it is found that the optical path can take a maximum, a minimum or an inflection value, and a set of useful coordinates is introduced to determinate when each type of stationary path occurs. In particular, the object-image points of the Paraxial Optics are connected by inflection paths, and the Weierstrass's point of the mirror appears like a super stationary point.

RESUMEN

La función que define el camino óptico ha sido analizada para justificar y precisar el carácter de estacionariedad del camino óptico en una trayectoria real de luz. En un espejo esférico, se encuentra que el camino óptico puede ser máximo, mínimo o de inflexión, y se introducen unas coordenadas útiles para precisar cuando tiene lugar cada tipo de punto estacionario. En particular, los puntos objeto e imagen de la Optica Paraxial están unidos por un camino de inflexión y el punto de Weierstrass del espejo aparece como un punto superestacionario al anularse todas las derivadas del camino óptico.

1. INTRODUCCION

El Principio de Fermat se formula como un principio variacional sobre el camino óptico que la luz recorre entre dos puntos. Sin embargo, en muchas ocasiones es considerado como un simple Principio de mínimo, llamándolo "Principio de tiempo mínimo" o "Principio de camino óptico mínimo". Según este Principio, en una trayectoria real de luz entre dos puntos, P_1 , P_2 , el camino óptico toma un valor *menor* que el que tomaría sobre cualquier otra trayectoria que los una. Este enunciado es correcto, y es el que podríamos denominar enunciado "fuerte", si tanto la trayectoria real como las meramente geométricas residen en una región regular, en la cual solo un rayo pasa a través de cada punto (1).

Si se elimina la condición de regularidad en el Principio de Fermat pasa a ser el que podríamos denominar "débil" y se enuncia con una condición de *estacionariedad* sobre la función camino óptico.

En este trabajo se ha acometido un estudio sistemático de la función que define el camino óptico en el sentido de acotar de un modo preciso y justificado el ambigüo enunciado del Principio "débil" de Fermat, en el sentido de no precisar el tipo de camino estacionario.

Hemos concretado el estudio al caso de un espejo esférico. Del cálculo del camino óptico y sus derivadas sucesivas se puede concluir que los caminos ópticos máximos son tan abundantes como los mínimos y que cuando los puntos de llegada y partida son tales que corresponden a la conocida ecuación de correspondencia

objeto e imagen en Optica Paraxial, se obtiene el camino óptico como un punto de inflexión.

En la Sección 2 se estudian las condiciones de estacionariedad para el camino óptico para todas las posiciones posibles de los puntos inicial y final de la trayectoria, ampliando los ejemplos dados por Halliday y Resnick (2) y por Kaushick y Sukheeja (3), agotando todos los casos posibles.

En la Sección 3 se introducen unas coordenadas que nos permiten clasificar las trayectorias como mínimas, máximas y de inflexión, así como obtener una sencilla representación gráfica para las regiones de valores de estas coordenadas en las que se producen cada tipo de trayectoria estacionaria.

2. CONDICIONES DE ESTACIONARIEDAD PARA EL CAMINO OPTICO

El camino óptico, L , entre dos puntos A y C , para una trayectoria que los une γ en un medio con índice de refracción n está definido por la siguiente integral de línea

$$L = \int_{\gamma} n \, dl. \quad [1]$$

El Principio de Fermat, en sentido amplio, afirma que esta integral toma un valor estacionario cuando γ es una trayectoria real de luz.

En las Figs. 1 podemos ver un espejo esférico cóncavo de radio a y centro en O . Los puntos A y C , inicial y final respectivamente, pueden estar situados delante o detrás del espejo según que la trayectoria sea real o virtual. El camino que los une debe pasar por un punto del espejo, al que llamaremos X . El punto B , también del espejo, es aquel para el cual los segmentos AB y BC forman el mismo ángulo i respecto a OB , que tomamos como eje de referencia.

Para calcular el camino óptico entre A y C a través de X tomamos un sistema de coordenadas polares tal y como se muestra en las Figs. 1, siguiendo el mismo procedimiento que S-y Mak (4). En las mismas figuras también se muestra el ángulo δ , que mide el desplazamiento del punto X en el espejo respecto del punto B .

Al ser los medios de los espacios objeto e imagen homogéneos podemos escribir el camino óptico como

$$L(\delta) = n \, AX + n' \, XC. \quad [2]$$

En el caso de trayectorias reales, los índices n y n' de los espacios objeto e imagen deben tomarse como positivos y en el caso de trayectorias virtuales como negativos. Si además el medio es el aire, n y n' tomarán únicamente los valores 1 y -1 respectivamente. El camino óptico es entonces

$$L(\delta) = \pm AX \pm XC. \quad [3]$$

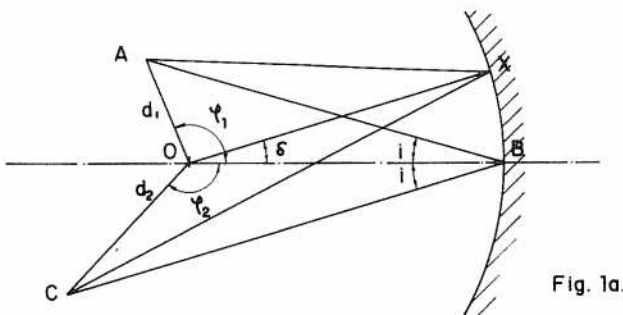


Fig. 1a.

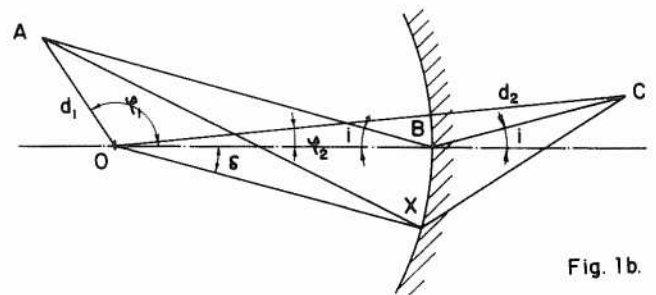


Fig. 1b.

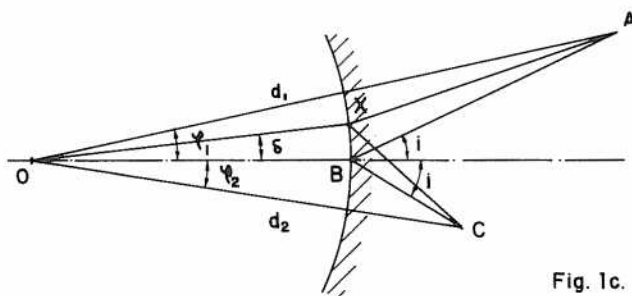


Fig. 1c.

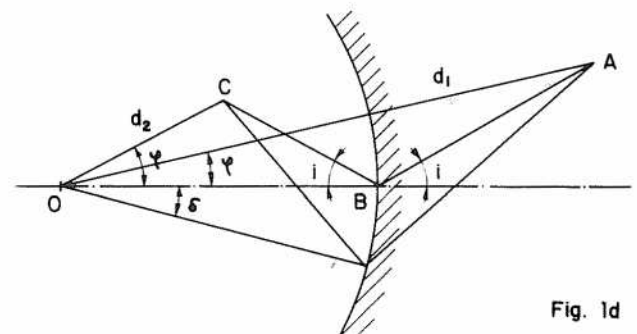


Fig. 1d

Fig.1.— Los puntos A y C están determinados por sus coordenadas polares (d_1, φ_1) y (d_2, φ_2) . La trayectoria que los une puede variarse a través del parámetro δ . Cuando la trayectoria está delante del espejo es real y cuando está detrás virtual. Se muestran los cuatro casos posibles.

Los signos mas han de tomarse para segmentos de trayectorias reales, y los menos para virtuales.

En función de las coordenadas polares de cada punto, los segmentos AX y XC son

$$AX = [d_1^2 + a^2 - 2d_1 a \cos(\varphi_1 - \delta)]^{1/2}, \quad [4a]$$

$$XC = [d_2^2 + a^2 - 2d_2 a \cos(\varphi_2 - \delta)]^{1/2}. \quad [4b]$$

Según el Principio de Fermat, la ecuación

$$\frac{dL(\delta)}{d\delta} = 0, \quad [5]$$

determina la trayectoria real que une A y C a través del espejo. Introduciendo las ecs. [4] en la [3] y aplicando la condición [5] obtenemos

$$\pm \frac{-d_1 a \sin(\varphi_1 - \delta)}{[d_1^2 + a^2 - 2d_1 a \cos(\varphi_1 - \delta)]^{1/2}} \pm \frac{d_2 a \sin(-\varphi_2 + \delta)}{[d_2^2 + a^2 - 2d_2 a \cos(\varphi_2 - \delta)]^{1/2}} = 0. \quad [6]$$

Para el caso en que los puntos A y C estén los dos delante o los dos detrás del espejo (Figs. 1.a y 1.c) tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} d_1 \sin \varphi_1 &= AB \sin i \\ d_2 \sin(-\varphi_2) &= BC \sin i \end{aligned} \quad [7]$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 \cos \varphi_1 &= AB \cos i + a \\ d_2 \cos(-\varphi_2) &= -BC \cos i + a \end{aligned} \right\} [10]$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 \cos \varphi_1 &= -AB \cos i + a \\ d_2 \cos(-\varphi_2) &= BC \cos i + a \end{aligned} \right\} [11]$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 \cos \varphi_1 &= AB \cos i + a \\ d_2 \cos(-\varphi_2) &= BC \cos i + a \end{aligned} \right\} [12]$$

$$\left. \begin{aligned} d_1 \cos \varphi_1 &= AB \cos i + a \\ d_2 \cos(-\varphi_2) &= -BC \cos i + a \end{aligned} \right\} [13]$$

y cuando A está delante y C detrás o viceversa (Figs. 1.b y 1.d)

$$\begin{aligned} d_1 \sin \varphi_1 &= AB \sin i \\ d_2 \sin \varphi_2 &= BC \sin i \end{aligned} \quad [8]$$

Introduciendo la ec. [7] o la ec. [8] en la [6], según el caso, es fácil comprobar que $\delta = 0$ satisface las cuatro ecuaciones de la expresión [6]. Por lo tanto, según el Principio de Fermat, la trayectoria real de luz es la que pasa por el punto B para los cuatro casos. Es decir, el ángulo de incidencia es igual al de reflexión.

Para estudiar qué tipo de trayectorias estacionarias son las encontradas es necesario verificar el signo de la segunda derivada en el punto $\delta = 0$. Calculando ésta se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2 L(\delta)}{d\delta^2} &= \pm \left\{ \frac{d_1 a \cos(\varphi_1 - \delta)}{[d_1^2 + a^2 - 2d_1 a \cos(\varphi_1 - \delta)]^{1/2}} - \frac{d_1 a \sin(\varphi_1 - \delta)}{[d_1^2 + a^2 - 2d_1 a \cos(\varphi_1 - \delta)]^{3/2}} \right\} \\ &\pm \left\{ \frac{d_2 a \cos(-\varphi_2 + \delta)}{[d_2^2 + a^2 - 2d_2 a \cos(-\varphi_2 + \delta)]^{1/2}} - \frac{d_2 a \sin(-\varphi_2 + \delta)}{[d_2^2 + a^2 - 2d_2 a \cos(-\varphi_2 + \delta)]^{3/2}} \right\}. \quad [9] \end{aligned}$$

Cuando $\delta = 0$ podemos utilizar de nuevo las relaciones [7] u [8], según el caso, y las siguientes que se deducen de las 4 situaciones descritas en la Fig. 1.

Así, obtenemos para la derivada segunda del camino óptico, cuando $\delta = 0$

$$\left[\frac{d^2 L}{d\delta^2} \right]_{\delta=0} = a \cos i \left[a \cos i \left(\pm \frac{1}{AB} \pm \frac{1}{BC} \right) - 2 \right], \quad [14]$$

donde los signos mas corresponden a trayectorias reales y los menos a virtuales, que se dan en los cuatro casos de las Fig. 1.

El camino óptico será mínimo, de inflexión o máximo según se cumplan las siguientes desigualdades

$$a \cos i \left[\pm \frac{1}{AB} \pm \frac{1}{BC} \right] - 2 \gtrless 0. \quad [15]$$

3. DISCUSION DE LAS CONDICIONES DE EXTREMAL

Las 8 inecuaciones y las 4 ecuaciones de la expresión [15] pueden ser resumidas si definimos unas nuevas variables que cambien de signo según la localización de A y C respecto a la superficie del espejo, es decir, según se trate de trayectorias reales o virtuales. Estas nuevas coordenadas están definidas como sigue

$$|x_A| = \frac{AB}{\cos i}, \quad [16a] \quad |x_C| = \frac{BC}{\cos i}, \quad [16b]$$

y su signo depende de la localización de A y C. Su representación gráfica puede verse en la Fig. 2. x_A y x_C son positivos si A y C, respectivamente, están delante del espejo y negativos en caso contrario. Entonces la expresión [15] puede escribirse

$$a \left[\frac{1}{x_A} + \frac{1}{x_C} \right] - 2 \gtrless 0. \quad [17]$$

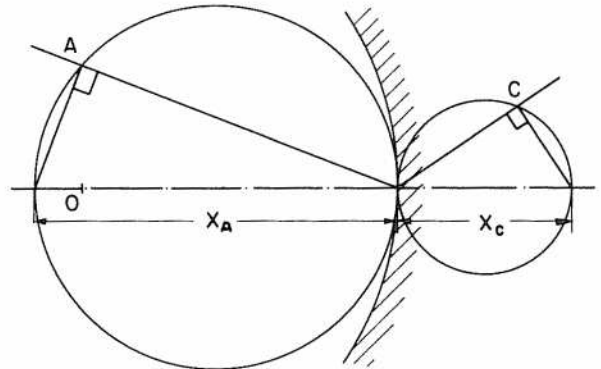


Fig. 2.— Descripción geométrica de las coordenadas x_A y x_C . Todos los puntos a lo largo de las circunferencias tienen los mismos valores de estas coordenadas y están conectados por el mismo tipo de camino óptico.

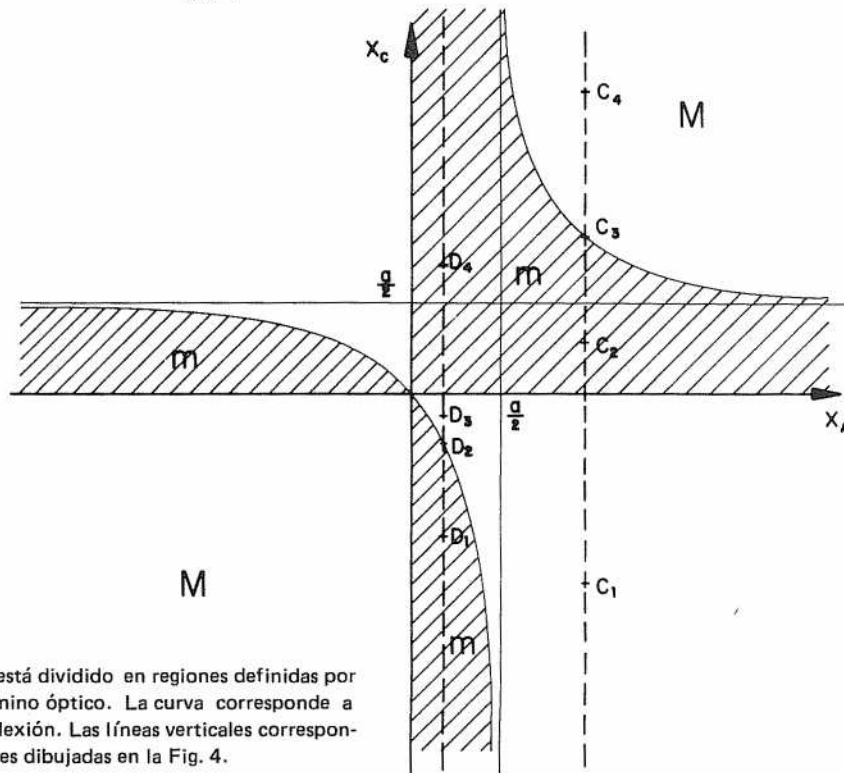


Fig. 3.— El plano x_A-x_C está dividido en regiones definidas por el carácter del camino óptico. La curva corresponde a los caminos de inflexión. Las líneas verticales corresponden a las situaciones dibujadas en la Fig. 4.

En la Fig. 3 se representan x_A y x_C en dos ejes perpendiculares. A partir de la ec. [17] se obtienen diferentes regiones correspondientes a zonas de máximos (M), mínimos (m) e inflexiones (I). Cada punto de una de estas regiones representa dos puntos A y C en el espacio, con coordenadas x_A y x_C . Por la zona a la que pertenecen sabemos si la trayectoria de luz que los une es un camino óptico máximo, mínimo o de inflexión.

Las zonas de máximos están separadas de las de mínimos por la zona de inflexión, que se reduce a una curva, cuya ecuación es

$$\frac{1}{x_A} + \frac{1}{x_C} = \frac{2}{a} \quad [18]$$

Esta ecuación, cuando x_A y x_C corresponden a A y C en el eje del espejo (OB) resulta ser la conocida ecuación objeto—imagen de la Optica Paraxial para un espejo esférico. Por lo tanto los puntos objeto e imagen de la Optica Paraxial, en un espejo esférico, están unidos siempre por un camino óptico de inflexión.

Para ser precisos debemos calcular la tercera derivada para comprobar que no se anula. Después de algunos cálculos resulta

$$\left. \frac{d^3 L(\delta)}{d\delta^3} \right|_{\delta=0} = \pm 3a^2 \operatorname{sen} i \left[\frac{1}{x_A} - \frac{1}{x_C} \right] \quad [19]$$

El signo positivo corresponde a A y C ambos delante o detrás del espejo, y el negativo a uno delante y otro detrás. Solo cuando se cumple que $x_A = x_C = a$ las ecuaciones [18] y [19] son cero simultáneamente, pero en este caso la cuarta derivada es

$$\left. \frac{d^4 L(\delta)}{d\delta^4} \right|_{\delta=0} = 6a \cos i \left[\frac{1}{\cos^2 i} - 1 \right], \quad [20]$$

que es mayor que cero excepto si $i = 0$, en cuyo caso la expresión [20] es igual a cero. Además se cumple que todas las demás derivadas son cero cuando $x_A = x_C = a$ e $i = 0$.

En resumen, los puntos de la curva de la ecuación [18] son siempre de inflexión; si $x_A = x_C = a$ e $i = 0$ se trata de un punto superestacionario, que es además el punto de Weierstrass del espejo. Este punto tiene la propiedad de ser stigmático consigo mismo. Si $i \neq 0$ siendo $x_A = x_C = a$ se trata de caminos mínimos.

En la Fig. 4 se muestran, en dos casos particulares, la dependencia del signo de la derivada segunda de L (y

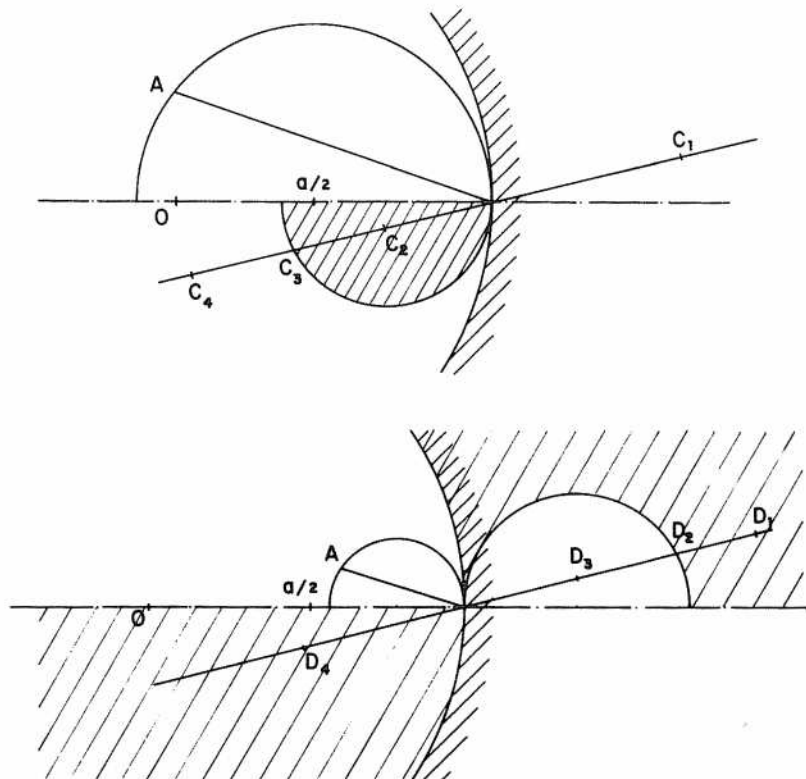


Fig. 4.— Si fijamos el punto A, el tipo de camino estacionario cambia si variamos la longitud del rayo en el que se sitúa el punto final. Se muestran dos casos para dos posiciones distintas de A. Los puntos C_i y D_i son los mismos que los representados en la Fig. 3.

por tanto el carácter extremal) con la longitud del rayo BC cuando el punto A permanece fijo. Los puntos C_1 y D_1 de la Fig. 4 son los mismos que los de la Fig. 3.

4. CONCLUSIONES

Los cálculos realizados nos han llevado a precisar el enunciado del Principio "débil" de Fermat en el caso de un espejo esférico. Se llega a la conclusión de que tan abundantes son los caminos máximos como los mínimos y de inflexión. Además, los puntos objeto e imagen de la Optica Paraxial están unidos por un camino óptico de inflexión. Se encuentra un punto superestacionario, el centro del espejo, que coincide con el punto de Weierstrass para un espejo esférico. Estas consideraciones nos podrían llevar a pensar en los puntos de Weierstrass

de cualquier sistema óptico como en puntos caracterizados por la propiedad de superestacionariedad, y que esta propiedad esté relacionada con las propiedades de stigmatismo de estos puntos. La misma extensión a otros sistemas ópticos podría esperarse sobre el carácter de punto de inflexión del camino óptico que une los puntos objeto e imagen en la Optica Paraxial.

BIBLIOGRAFIA

1. M. BORN y E. WOLF: "Principles of Optics" (*Pergamon Press Inc.*, New York, 1975).
2. D. HALLIDAY y R. RESNICK: "Physics" (part II) (*John Wiley and Sons, Inc.*, New York).
3. B.K. KAUSHICK y B.D. SUKHEEJA: *Phys. Educ.*, **19**, 90 (1984).
4. SE-YUEN MAK: *Phys. Educ.*, **21**, 365 (1986).

★ ★ ★