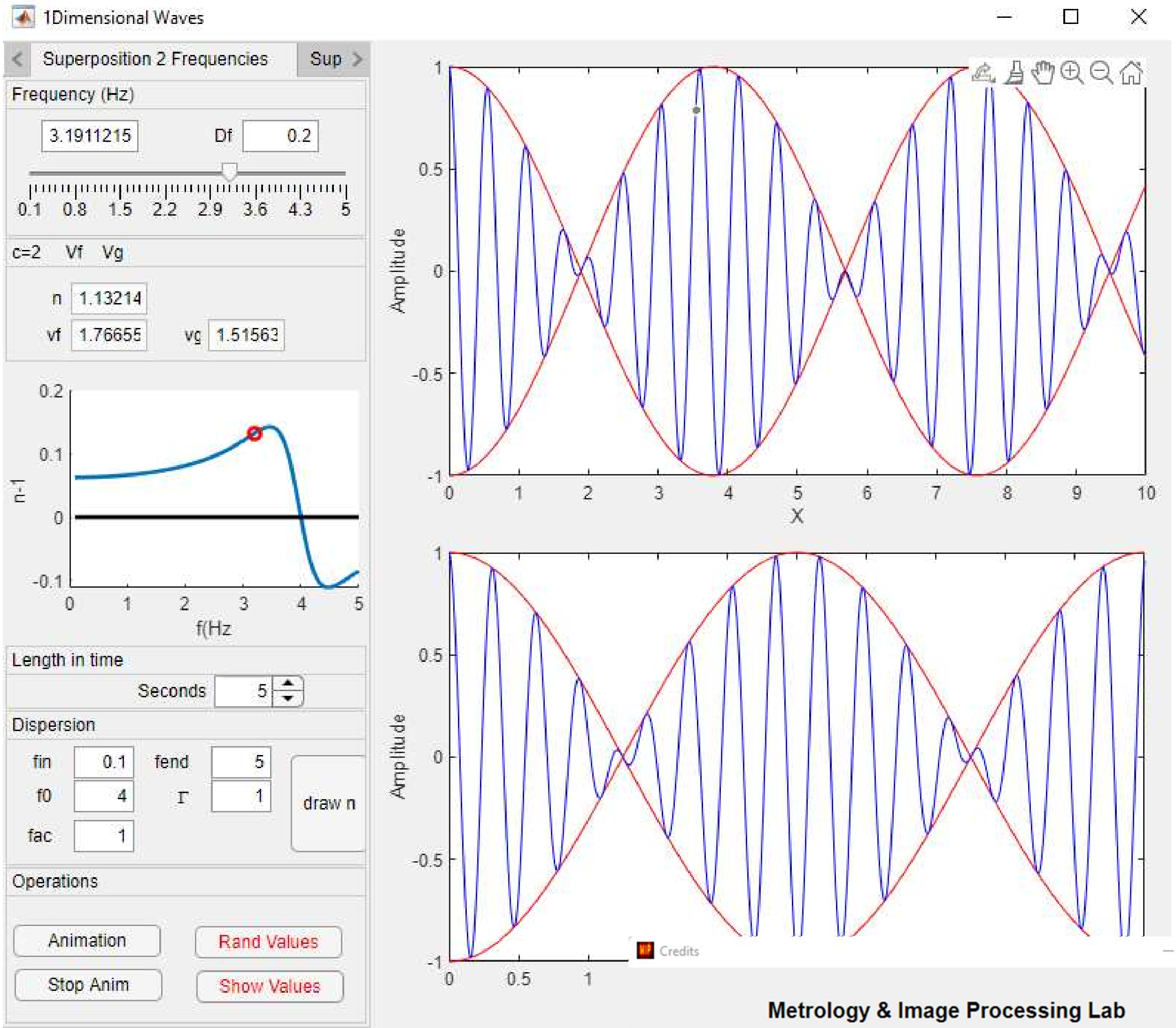
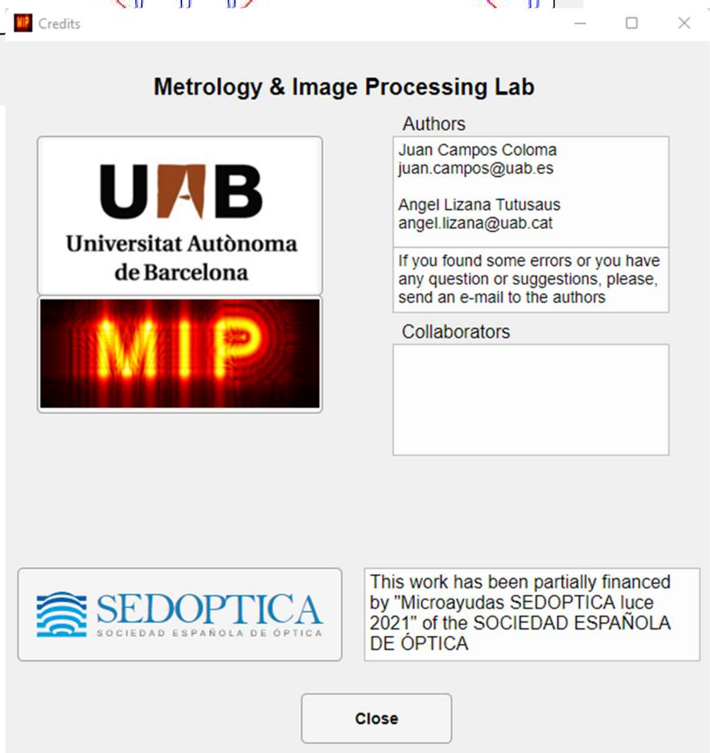
Ondas 1D





Juan Campos Coloma juan.campos@uab.es

Ángel Lizana Tutusaus angel.lizana@uab.cat

Bellaterra, 29/06/2022

1 CONTENIDO

2 RESUMEN TEORÍA

Ondas armónicas

Supondremos soluciones de la ecuación de onda de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \tag{1.1}$$

Si tomamos cada una de las componentes del campo quedará

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \tag{1.2}$$

Con

$$\left.\begin{aligned} \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \\ k = \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}\right\} \mathrm{v} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} \tag{1.3}$$

Donde ω es la frecuencia angular, ν(Hz) la frecuencia temporal, T(s) el periodo temporal, k, el número de ondas, λ(m) la longitud de onda y v(m/s) la velocidad de propagación. En el vacío la velocidad será igual a v=c, que en el programa para escalar los dibujos se ha tomado c=2m/s. El índice de refracción n se define como

$$n = \frac{c}{\mathrm{v}} = c\frac{T}{\lambda} \tag{1.4}$$

La diferencia de fase entre dos frentes de onda separados una distancia Δl vendrá dada por2

$$|\Delta\phi| = \frac{2\pi}{\lambda}|\Delta l| = \frac{2\pi}{\lambda_0} n |\Delta l| \tag{1.5}$$

Donde λ y λ_0 son las longitudes de onda en el medio y en el vacío respectivamente

2.1 SUPERPOSICIÓN DE ONDAS DE LA MISMA FRECUENCIA CON VECTORES ELÉCTRICOS PARALELOS

En un punto determinado, llegan dos ondas de la misma frecuencia con los vectores eléctricos paralelos (eliminaremos la parte vectorial)

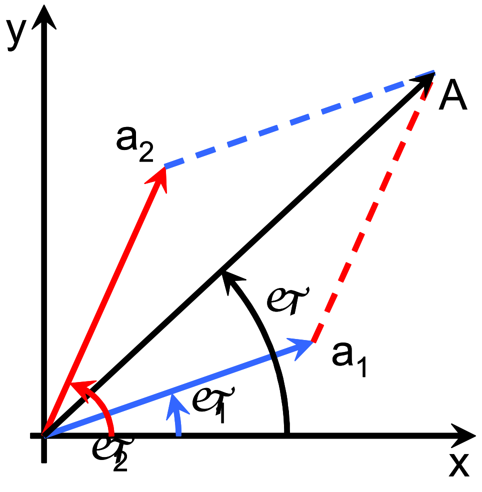


Figura 1. Representación de las amplitudes complejas

$$E_1 = a_1 e^{i(wt+\phi_1)}$$

$$E_2 = a_2 e^{i(wt+\phi_2)}$$

El campo eléctrico resultante será la suma de los dos

$$E = E_1 + E_2 = \left(a_1 e^{i\phi_1} + a_2 e^{i\phi_2}\right) e^{iwt} = \underbrace{a\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}_{\substack{amplitud \\ compleja}}\ e^{iwt} = a\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{wt}+\phi)}$$

La amplitud y fase de la onda resultante vienen dadas por

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{a}^2 &= \mathrm{a}_1^2 + \mathrm{a}_2^2 + 2\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \\ \mathrm{tg}\,\varphi &= \frac{\mathrm{a}_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + \mathrm{a}_2 \operatorname{sen}\varphi_2}{\mathrm{a}_1 \cos\varphi_1 + \mathrm{a}_2 \cos\varphi_2} \end{aligned}}$$

2.2 SUPERPOSICIÓN DE ONDAS DE DIFERENTE FRECUENCIA. CASO SENCILLO

En este caso supondremos que se superponen dos ondas de frecuencia muy parecida con la misma amplitud

$$\begin{aligned} E_1 &= A\ \cos(\omega t - kx) \\ E_2 &= A\ \cos((\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x) \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &E(x,t) = 2A\ \cos\left[\frac{1}{2}(t\,\Delta\omega - x\,\Delta k)\right]\cos(\bar{\omega}\,t - \bar{k}\,x) \\ &\bar{\omega} = \omega + \frac{\Delta\omega}{2} \quad ; \qquad \bar{k} = k + \frac{\Delta k}{2} \end{aligned}} \tag{1.7}$$

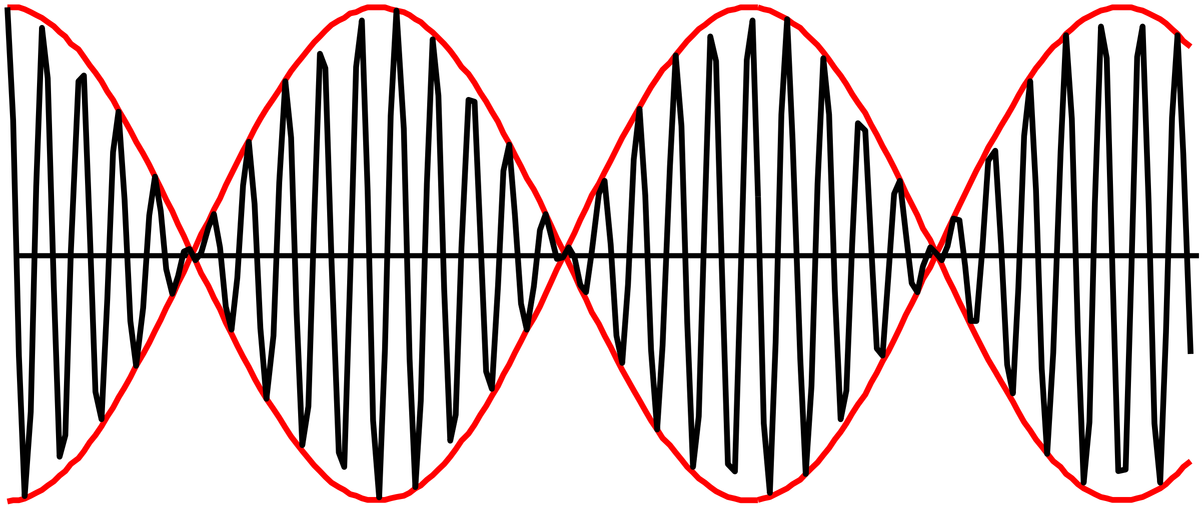


Figura 2. Superposición de dos ondas de frecuencia muy parecida. En rojo, lo onda moduladora, en negro, la onda modulada

La onda modulada se mueve a la velocidad de fase que viene dada por $v_f = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}}$, mientras que la moduladora se mueve a la velocidad de grupo $\boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad v_f = \frac{\omega}{k}}$

Teniendo en cuenta que $k = \frac{\omega n}{c}$ se puede calcular la velocidad de grupo como

$$\boxed{v_g = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{c}{\frac{d(\omega n)}{d\omega}} = \frac{c}{n + \omega\frac{dn}{d\omega}}} \tag{1.8}$$

Si $\left(\frac{dn}{d\lambda} < 0\right)$ $\left(\frac{dn}{d\omega} > 0\right)$ => $v_g < v_f$ $\quad$ *dispersión normal*

Si $\left(\frac{dn}{d\lambda} > 0\right) \quad \left(\frac{dn}{d\omega} < 0\right) \Rightarrow v_g > v_f \qquad \textit{dispersión}\ \text{anómala}$

El índice de refracción de grupo n_g se puede definir como

$$n_g = \frac{c}{v_g} = n(\lambda_0) - \lambda_0 \frac{dn}{d\lambda_0} \tag{1.9}$$

2.2.1 Modelo de dispersión

El modelo que se utiliza en el programa para la dispersión (variación del índice de refracción con la frecuencia) es el siguiente:

$$n = 1 + fac \frac{f_0^2 - f^2}{\left(f_0^2 - f^2\right)^2 + \Gamma^2 f^2} \tag{1.10}$$

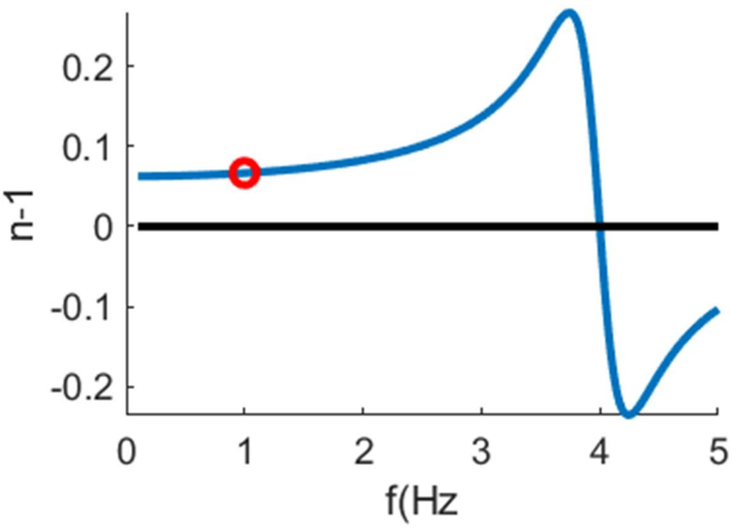


Figura 3. Variación del índice de refracción con la frecuencia

Donde fac es un factor de escala, f_0 es la frecuencia (Hz) de resonancia, f es la frecuencia para la que calculamos el índice de refracción y Γ sería el factor de amortiguamiento. Estos parámetros se leen en la "interfaz del usuario"

NOTAD que la parte imaginaria del índice de refracción no se tiene en cuenta, así que la propagación alrededor de la frecuencia de resonancia no estaría bien modelizada.

En esta figura f_0 = 4Hz, fac = 1, y $\Gamma = 0.5$

Si $\frac{dn}{df} > 0$ estamos en la zona de dispersión normal. Mientras que si $\frac{dn}{df} < 0$ estamos en la dispersión anómala

En un medio dispersivo, un pulso, al irse propagando se va ensanchando. El modelo usado para el ensanchamiento es:

$$|\Delta\tau| = \frac{L}{c}\Delta f \left[2\frac{dn}{df} + f\frac{d^2 n}{df^2}\right] \tag{1.11}$$

Donde L es la distancia recorrida, y Δf es la anchura espectral del pulso

2.3 Ondas cuasi monocromáticas. Transformada de Fourier

Dada una función f(t), se define su Transformada de Fourier (F(ν)) como

$$\boxed{F(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i2\pi\nu t)\,dt}$$

Y su transformada de Fourier inversa como

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu)\exp(i2\pi\nu t)\,d\nu}$$

Algunas de las propiedades son:

1. Linealidad

$$\Im[\alpha\, f(t) + \beta\, g(t)] = \alpha\, \Im[f(t)] + \beta\, \Im[g(t)] \tag{1.12}$$

2. Similitud

$$\Im[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\nu}{a}\right) \quad (a\ real) \tag{1.13}$$

3. Traslación

$$\Im[f(t-a)] = \exp(-i2\pi\nu a)\, F(\nu) \tag{1.14}$$

4. Identidad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\nu)|^2 d\nu \tag{1.15}$$

$$\Im(F(\nu)) = f(-t) \tag{1.16}$$

2.3.1 Transformada de Fourier de la función rectángulo centrada

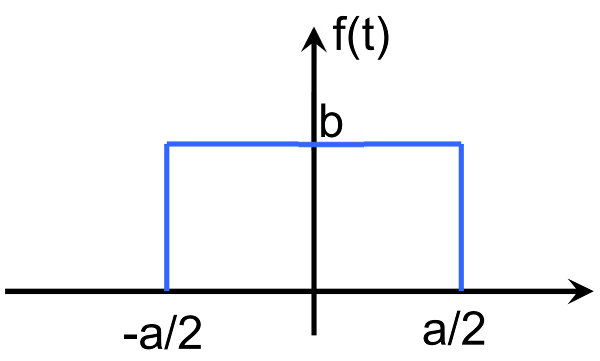


Figura 4.Función rectángulo centrada

Calcule la transformada de Fourier de una función rectángulo centrada

$$f(t) = \begin{cases} 0 & |t| > \dfrac{a}{2} \\ 1 & b - \dfrac{a}{2} < t < \dfrac{a}{2} \end{cases} \tag{1.17}$$

$$F(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\nu t}dt=\int_{\frac{-a}{2}}^{\frac{a}{2}} b\ \ e^{-i2\pi\nu t}dt$$

$$=\frac{b}{-i2\pi\nu}\ \ e^{-i2\pi\nu t}\Big]_{-a2}^{a/2}=\frac{b}{-i2\pi\nu}\left[e^{-i2\pi\nu\frac{a}{2}}-e^{i2\pi\nu\frac{a}{i}}\right]$$

$$=\frac{b}{-i2\pi\nu}2(-i)\quad sen\left(2\pi\nu\frac{a}{2}\right)=b\frac{1}{2\pi}\frac{2}{\nu}sen\left(2\pi\frac{\nu}{2}\right)=$$

$$\boxed{=ba\frac{sen(\pi\nu a)}{\pi\nu a}} \tag{1.18}$$

2.3.2 Onda cuasimonocromática

Una onda cuasimonocromática se puede escribir como

$$E(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Delta\omega} E(\omega)e^{i(\omega t-k(\omega)z)}d\omega$$

Si suponemos que $E(\omega)$ es diferente de cero sólo en un pequeño intervalo en torno a ω_0, podemos desarrollar $k(\omega)$ en serie de Taylor

$$k(\omega)=k_0-\frac{1}{v_g}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)^2\gamma$$

Donde

$$k_0\equiv k(\omega_0)$$

$$\frac{1}{v_g}\equiv\left.\frac{dk}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$$

$$\gamma\equiv\left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega=\omega_0}$$

Si se consideran sólo los dos primeros términos tendremos:

$$E(z,t)=\frac{1}{2\pi}e^{i(\omega_0 t-k_0 z)}\int_{-\infty}^{\infty} E(\Omega)e^{i\frac{\Omega}{v_g}(z-v_g t)}d\Omega$$

Con $\Omega=\omega-\omega_0$. El primer término corresponde a la propagación de la fase, mientras que el segundo es la propagación de la envolvente. Debido a que cada longitud de onda de un pulso va a viajar con diferente velocidad, y la velocidad de grupo depende de la longitud de onda central, en general, los pulsos se ensancharán.

El ensanchamiento del pulso vendrá dado por

$$\Delta\tau_m=\frac{L\Delta\lambda_0}{\lambda_0 c}\left[\lambda_0^2\frac{d^2n}{d\lambda_0^2}\right]=\frac{L}{c}\Delta f\left[2\frac{dn}{df}+f\frac{d^2n}{df^2}\right]$$

3 INTERFAZ CON EL USUARIO

La ventana de trabajo se divide en dos secciones. A la izquierda, en las diferentes pestañas se ven los cuatro tipos de cálculo que se pueden realizar. A la derecha se muestran los resultados de la propagación. En las tres primeras pestañas, al pulsar el botón “Animation” aparece una nueva ventana con la propagación de la onda de forma animada

3.1 PESTAÑA: HARMONIC WAVE

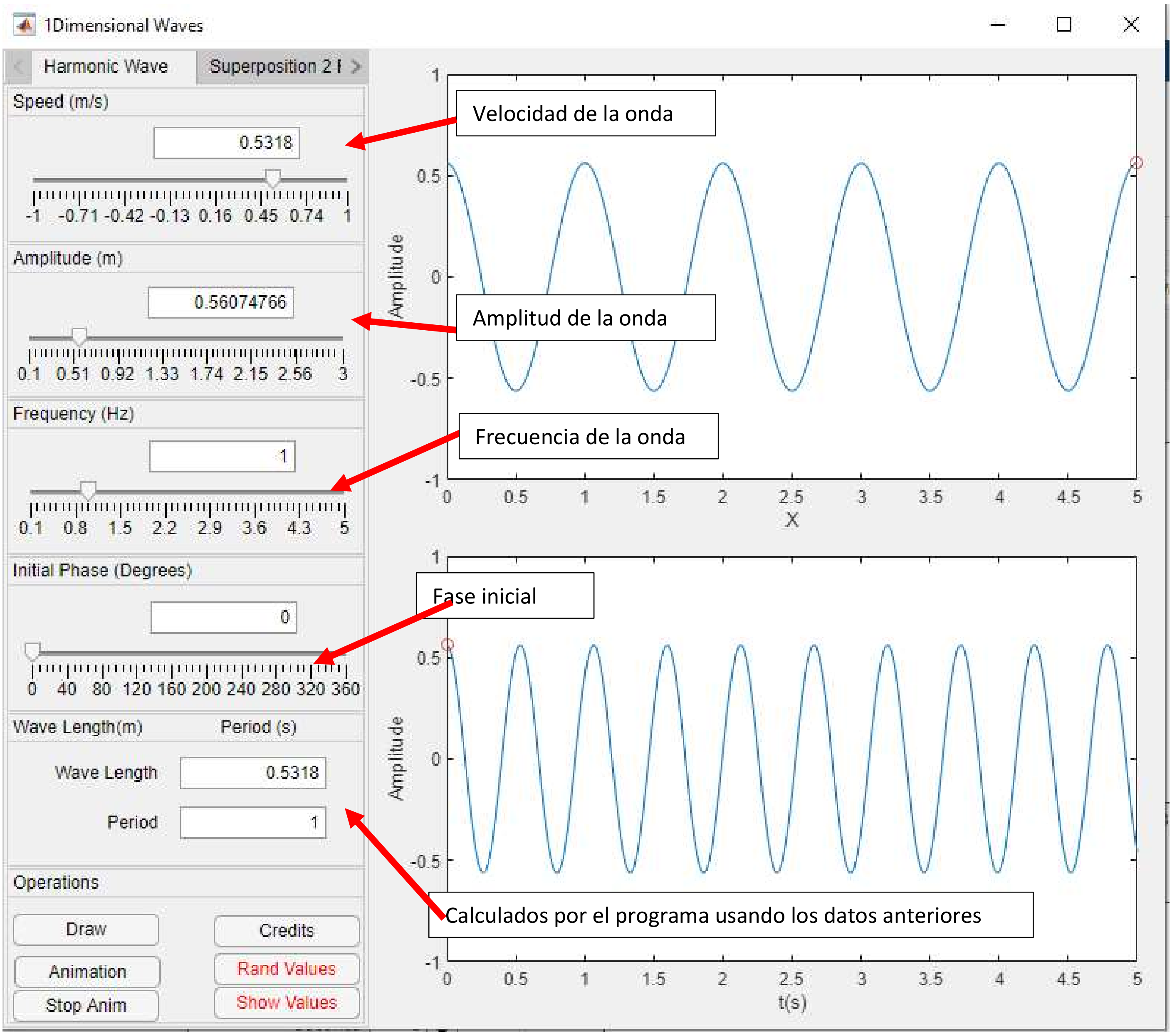


Figura 5. Pestaña: Harmonic Wave

Al iniciar el programa se muestra la ventana de la Figura 5. A la izquierda están todas las herramientas para cambiar los parámetros de la onda. A la derecha arriba se muestra la onda pata t=0 en función de la posición y abajo para x=0 en función del tiempo.

Al variar cada uno de los cursores se redibuja la onda con los nuevos parámetros y se calculan el Periodo P y la longitud de onda. Lo mismo ocurre al pulsar el botón "Draw"

Al pulsar el botón "Animation" se abre una nueva ventana con una animación de la onda. Esta animación para al pulsar el botón "Stop Anim".

Al pulsar el botón "Rand Values" se generan datos aleatorios para los parámetros y se ocultan todos los datos en el programa. Midiendo en la figura se pueden calcular el periodo, frecuencia, velocidad, índice de refracción y fase inicial de la onda. Podéis ejercitaros haciendo esos cálculos. Al pulsar el botón "Show Values", se visualizan de nuevo los datos y podéis comprobar si los cálculos realizados son correctos.

3.2 PESTAÑA: SUPERPOSITION 2 FREQUENCIES

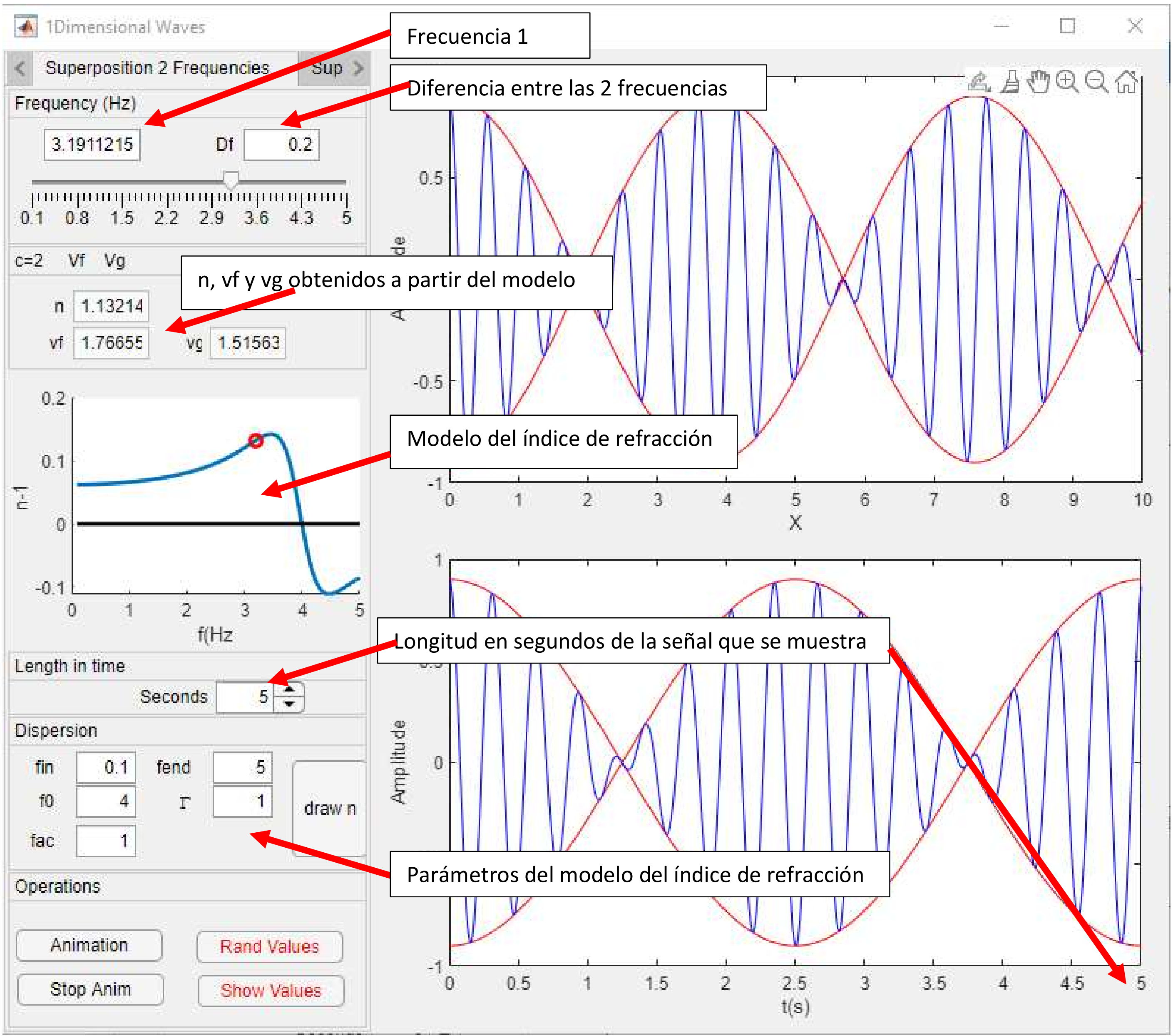


Figura 6. Superposición de dos ondas de frecuencia parecida

En la Figura 6 se muestra la interfaz del usuario cuando se utiliza la segunda pestaña "Superposition 2 Frequencies". En esta sección se simula la superposición de dos ondas de frecuencias parecidas, separadas Df(Hz). Variando la frecuencia central se cambia el punto utilizado de la curva de dispersión, y se puede observar la relación entre las velocidades de fase y de grupo.

3.3 PESTAÑA: SUP SAME FREQUENCIES

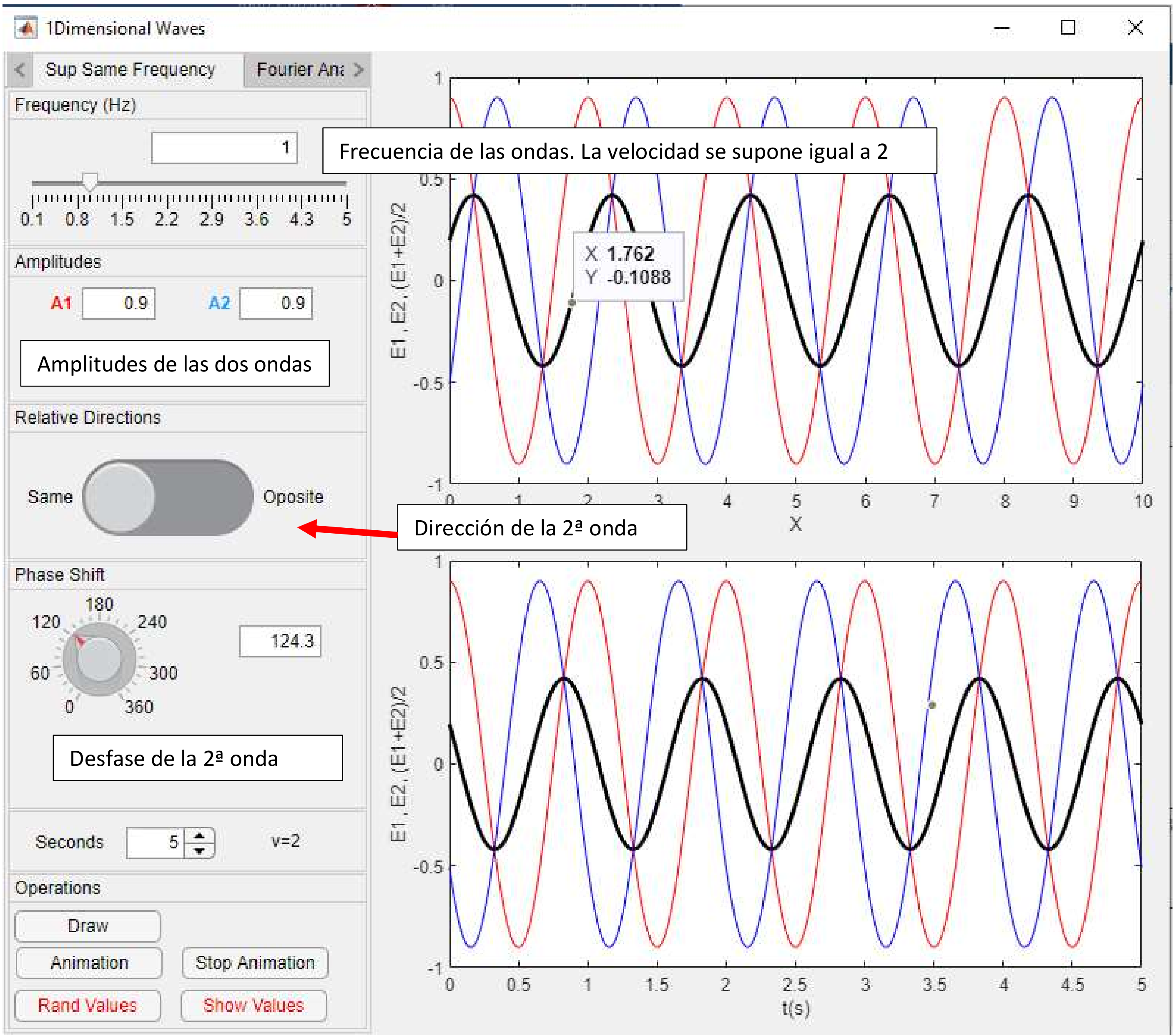


Figura 7. Superposición de dos ondas de la misma frecuencia con un determinado desfase

En este caso se superponen dos ondas de la misma frecuencia con amplitudes diferentes y con un desfase entre ellas.

La dirección de la segunda onda se puede hacer igual a la primera (interferencias) o en la dirección opuesta (ondas estacionarias)

3.4 PESTAÑA: FOURIER ANALYSIS

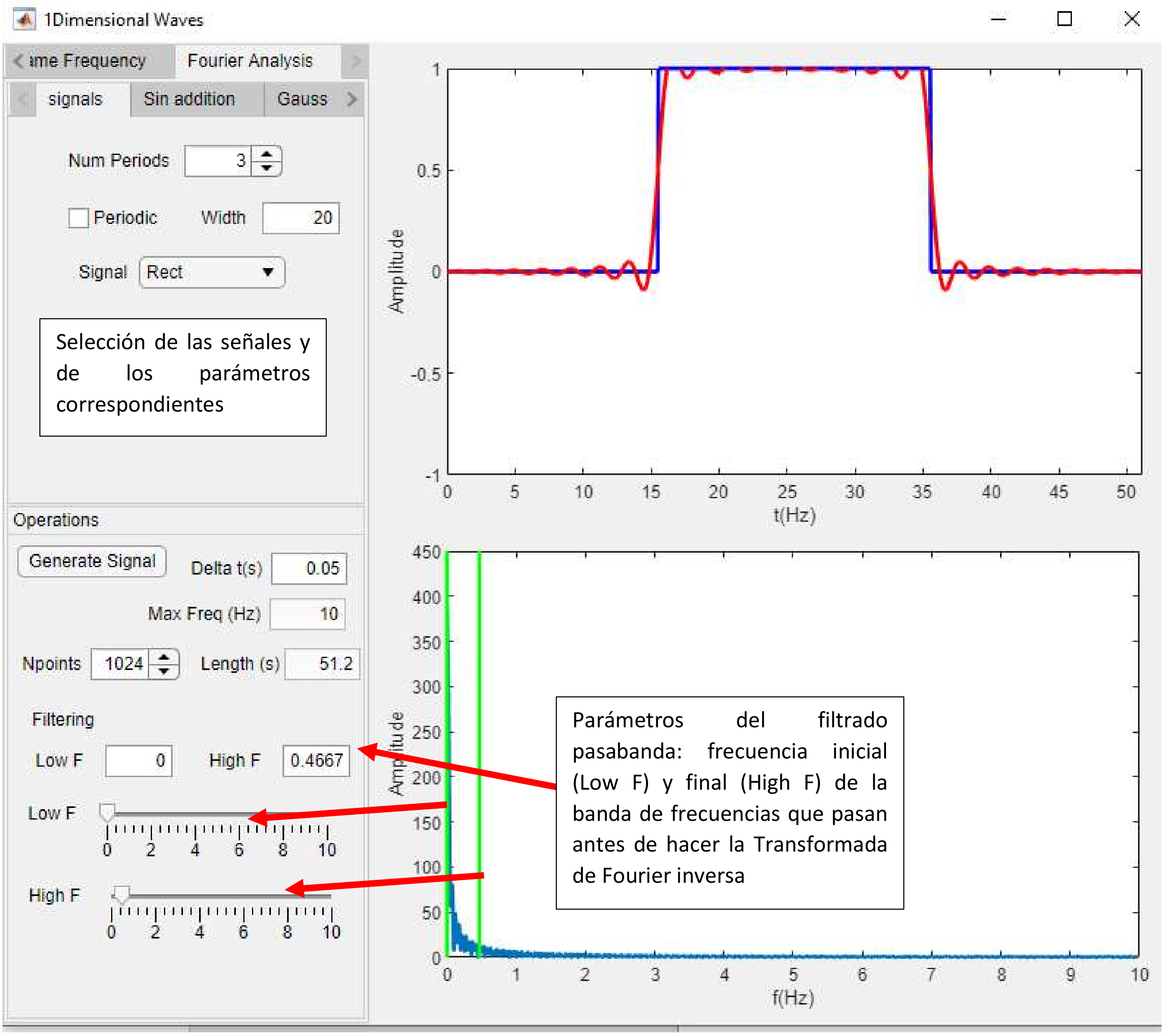
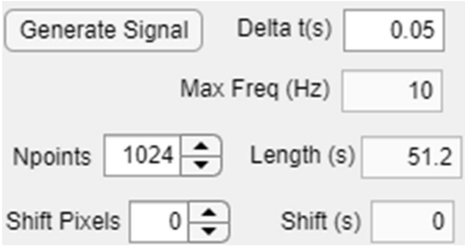


Figura 8. Analisis de Fourier de diferentes señales

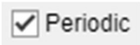
En esta pestaña se pueden generar diferentes tipos de señales, calcular su transformada de Fourier, filtrarla, y reconstruir la señal filtrada. Hay una serie de pestañas

En la caja “Operations” se pueden controlar diferentes parámetros de la señal a generar, como el número de puntos “Npoints”, distancia de muestreo en segundos “Delta t(s), con estos parámetros se calcula la máxima frecuencia a visualizar “Max Freq (Hz)” y la longitud de la señal en segundos “Length (s)”. Finalmente, se puede dar el desplazamiento en Píxeles de la señal “Shift Pixels” y se calcula el desplazamiento den segundos “Shift (s)”



Finalmente se puede controlar el filtrado en el dominio de Fourier. Se puede dar el filtro pasa-banda, es decir, el rango de frecuencias que se considerarán “Low F”-“High F”

3.4.1 “Signals”

Se pueden generar diferentes señales. Se puede hacer que la señal sea periódica, con un número exacto de periodos en el intervalo muestreado marcando la casilla  y escribiendo el número de periodos 

Si no se marca esta casilla, la señal no será “exactamente periódica”.

3.4.1.1 “Sinus/Cosinus”: Funciones Sinusoidales

Periodic:

En este caso se da el número de periodos que tendrá la señal “**Num Periods**” y al pulsar “**Generate Signal**” se calculan los parámetros “Periods (s)”, y “Central Freq (Hz)”

Non Periodic:

En este caso sólo hay que dar la frecuencia central de la señal “**Central Freq (Hz)”**

3.4.1.2 *“Rect”: función* Rectangular

Periodic

Non Periodic:

En este caso se da la anchura en segundos “**Width (s)**”. La función que se representa es

$$Rect(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |t| < \frac{w}{2} \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases} \tag{1}$$

3.4.1.3 “Triangle”

3.4.1.4 “Gauss”

“Gauss” En este caso se da el número de periodos que tendrá la señal “**Num Periods**” y al pulsar “**Generate Signal**” se calculan los parámetros “Periods (s)”, y “Central Freq (Hz)”

3.4.1.5

Periodic:

En este caso se da el número de periodos que tendrá la señal “**Num Periods**” y al pulsar “**Generate Signal**” se calculan los parámetros “Periods (s)”, y “Central Freq (Hz)”. También hay que dar la anchura “**Width (s)**”

Non Periodic:

En este caso se da la anchura en segundos “**Width (s)**”. La función que se representa es

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{w^2}} \tag{2}$$

3.4.1.6 "Exponential"

Periodic:

En este caso se da el número de periodos que tendrá la señal "**Num Periods**" y al pulsar "**Generate Signal**" se calculan los parámetros "Periods (s)", y "Central Freq (Hz)". También hay que dar la anchura "**Width (s)**"

Non Periodic:

En este caso se da la anchura en segundos "**Width (s)**". La función que se representa es

$$f(t) = e^{-\frac{t}{w}} \tag{3}$$

3.4.1.7 "SawTooth": Diente de sierra

Periodic:

En este caso se da el número de periodos que tendrá la señal "**Num Periods**" y al pulsar "**Generate Signal**" se calculan los parámetros "Periods (s)", y "Central Freq (Hz)".

Non Periodic:

En este caso se da el periodo en segundos "**Period (s)**". que es la anchura de cada diente

3.4.1.8 "Increasing ramp/Decreasing ramp"

Se calcula una función lineal creciente o decreciente. No se necesitan parámetros

3.4.1.9 "Rect Cos": Se calcula la multiplicación de una función s coseno por un rectángulo

Periodic:

Para el rectángulo se da el número de periodos que tendrá la señal "**Num Periods**" y al pulsar "**Generate Signal**" se calculan los parámetros "Periods (s)", y "Central Freq (Hz)".y la frecuencia del coseno se da en **"SinCosCentral Freq (Hz)"**.

Non Periodic:

En este caso se da la anchura en segundos "**Width (s)**" que es la anchura del rectángulo, y la frecuencia del coseno se da en **"SinCosCentral Freq (Hz)"**.

3.4.1.10 "Gauss Cos": Multiplicación de una Gaussiana por un coseno

El Coseno se define como en el caso anterior, la anchura de la gaussiana se da en "**Width (s)**"

3.4.1.11 "Exp Cos": multiplicación de una exponencial por una función coseno

El Coseno se define como en el caso anterior, la anchura de la exponencial se da en "**Width (s)**"

3.4.1.12 “File”

Se leen los datos de la función de un fichero

1. Se selecciona el fichero tipo excell “*.xlsx”, “*.xls”
2. Los datos se dan en el siguiente orden
   - Casilla (1,1): número de puntos
   - A partir de la fila 2, en la columna 1 se dan los valores del tiempo, mejor equiespaciados para hacer la Transformad de Fourier
   - A partir de la fila 2, en la columna 2 se dan los valores de la función correspondientes al tiempo de la columna 1.

3.4.2 “Sin Addition”

Aquí se pueden sumar diferentes funciones sinusoidales cada una de ellas con su frecuencia, amplitud y fase.

En la transformada de Fourier se ven las diferentes frecuencias y se pueden separar. Como las señales no serán exactamente periódicas, en la TF no aparecen deltas perfectas sino un poco ensanchadas

3.4.3 “Sin Gauss”

En este caso se genera una función sinusoidal multiplicada por una Gaussiana. Se puede generar la señal, o visualizar una animación. En este caso, se utiliza la curva de dispersión dada en la pestaña “Superposition 2 Frequencies”. Se puede visualizar una primera aproximación de la deformación del pulso a medida que se propaga.