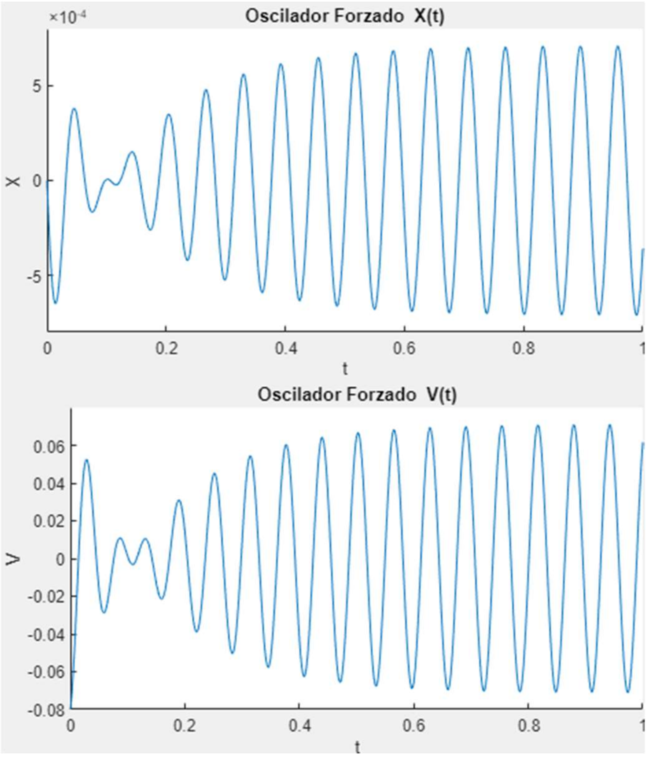
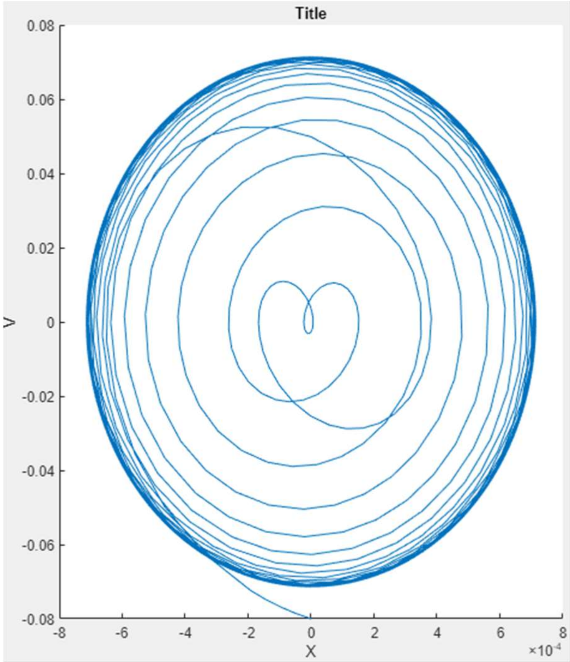
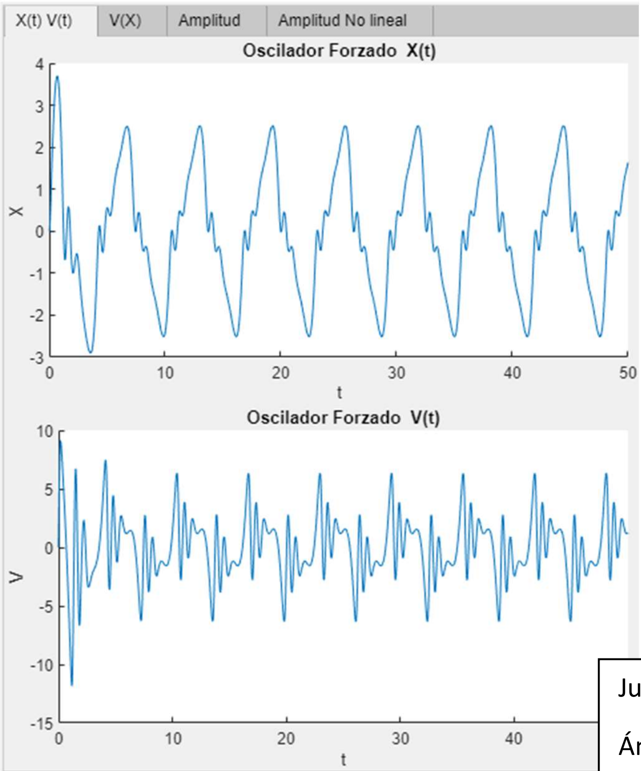
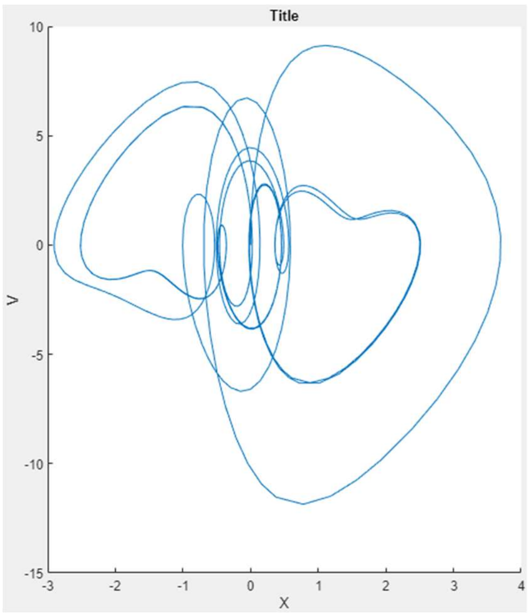
OSCILADOR FORZADO





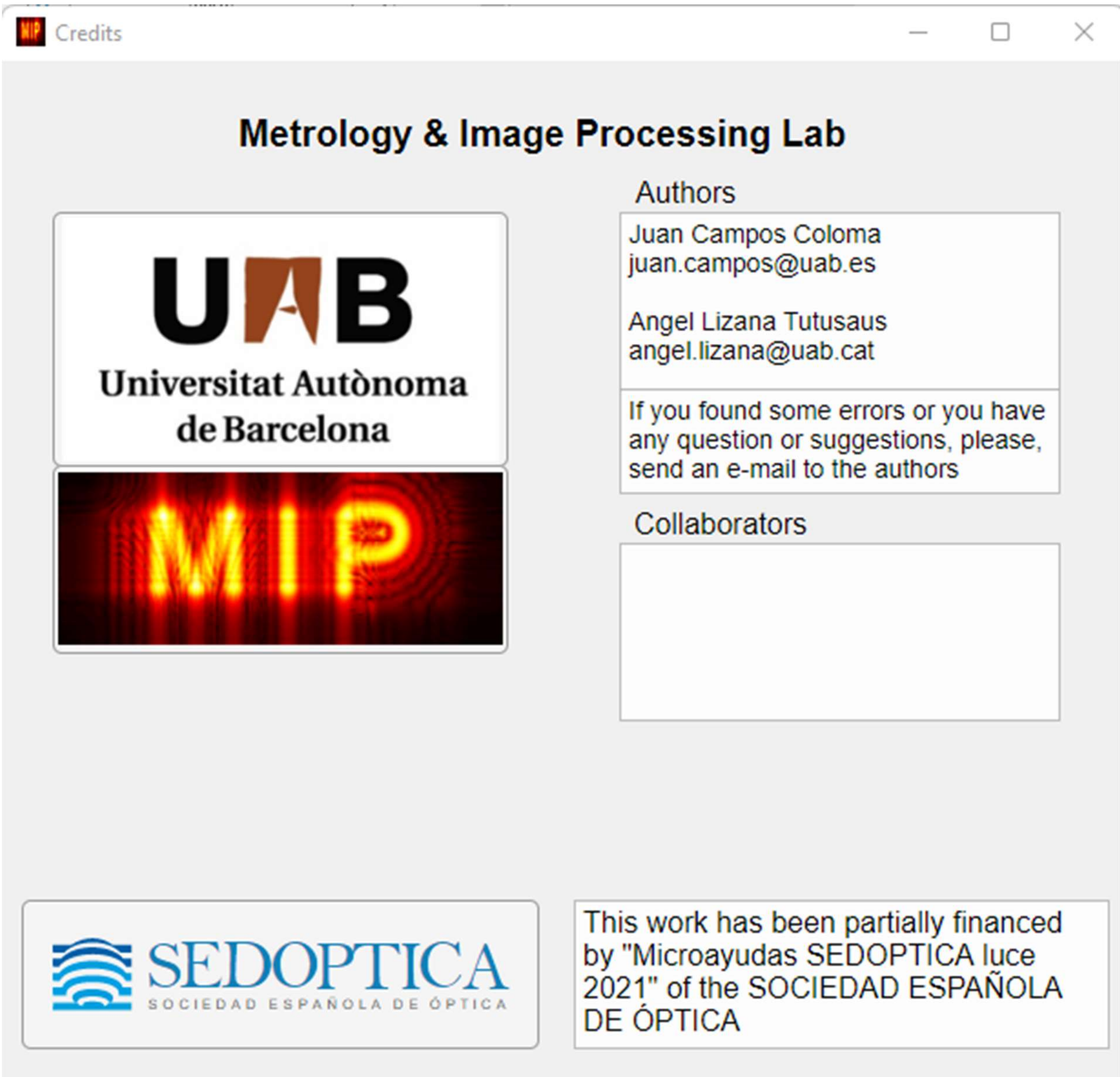




Juan Campos Coloma juan.campos@uab.es

Ángel Lizana Tutusaus angel.lizana@uab.cat

Bellaterra, 29/06/2022


Credits
Metrology & Image Processing Lab
Authors
Juan Campos Coloma
juan.campos@uab.es
Angel Lizana Tutusaus
angel.lizana@uab.cat
If you found some errors or you have any question or suggestions, please, send an e-mail to the authors
Collaborators
UAB
Universitat Autònoma de Barcelona
MIP
SEDOPTICA
SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ÓPTICA
This work has been partially financed by "Microayudas SEDOPTICA luce 2021" of the SOCIEDAD ESPAÑOLA DE ÓPTICA

1 CONTENIDO

2 Resumen teoría 4
2.1 Movimiento armónico simple 4
2.2 Oscilador amortiguado 4
2.3 Oscilador forzado 4
2.4 oscilador no lineal 5
2.5 Oscilador no lineal sin(x) 6
3 Instalación de la aplicación 7
4 Interfaz con el usuario 9
4.1 Parámetros de entrada 9
4.2 Resultados 10
4.2.1 Oscilador armónico simple 10
4.2.2 Oscilador amortiguado 12
4.2.3 Oscilador amortiguado y forzado 13

2 RESUMEN TEORÍA

Con este programa se puede simular la evolución temporal de un oscilador. Se puede usar un oscilador armónico, amortiguado y forzado. También se puede empezar a explorar un oscilador no lineal

2.1 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

En este caso la ecuación diferencial que describe el sistema viene dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{2}$$

Cuya solución viene dada por

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{3}$$

La amplitud y el desfase se obtienen a partir de las condiciones iniciales.

2.2 OSCILADOR AMORTIGUADO

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{5}$$

Si el amortiguamiento es pequeño $\beta < \omega_0$, la solución viene dada por

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{6}$$

Donde la amplitud inicial y desfase dependen de las condiciones iniciales y la frecuencia de oscilación viene dada por

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{7}$$

2.3 OSCILADOR FORZADO

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}cos(\omega t) \tag{8}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F\cos(\omega t) \tag{9}$$

Después de un periodo transitorio, el sistema oscila con la frecuencia de la fuerza externa

$$x(t) = Acos(\omega t + \delta) \tag{10}$$

Donde la amplitud y desfase no dependen de las condiciones iniciales y vienes dadas por

$$A(\omega) = \frac{F}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \tag{11}$$

$$\tan\delta = \frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{12}$$

En los tres casos anteriores la ecuación que se resuelve numéricamente en el programa es la ecuación (*9*), mediante el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -2\beta v - \omega_0^2 x = F\cos(\omega t) \end{cases} \tag{13}$$

2.4 OSCILADOR NO LINEAL

En este caso, se supone que la fuerza no es lineal con el desplazamiento, sino que sigue una función tangente hiperbólica. Así, la ecuación diferencial del movimiento viene dada por

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\tanh x = F\cos(\omega t) \tag{14}$$

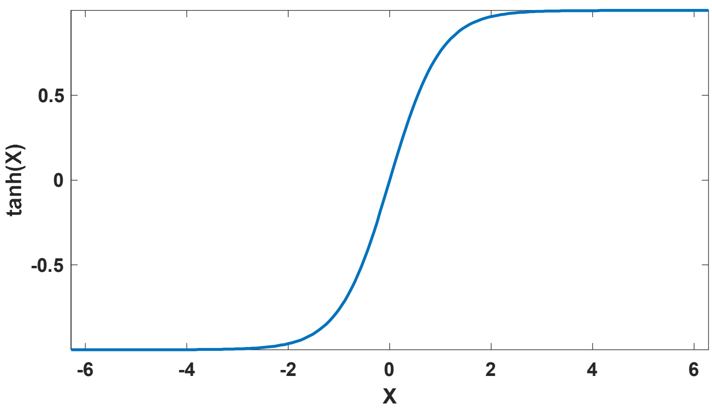


Figura 2-1 Función tangente hiperbólica

2.5 OSCILADOR NO LINEAL SIN(X)

En el caso de tener un péndulo con ángulos grandes, la fuerza recuperadora ya no es lineal con el desplazamiento sino que sigue una función sin(). En este caso la ecuación diferencial a resolver será

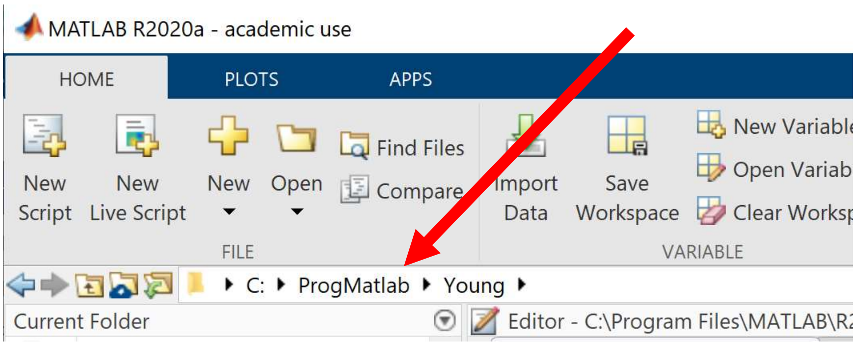
$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \sin x = F\cos(\omega t) \tag{15}$$

El periodo ya no será- constante independiente de la amplitud de la oscilación. En general, en este caso no consideraremos la fuerza externa F.

3 INSTALACIÓN DE LA APLICACIÓN

Podéis descargar Matlab, en la página

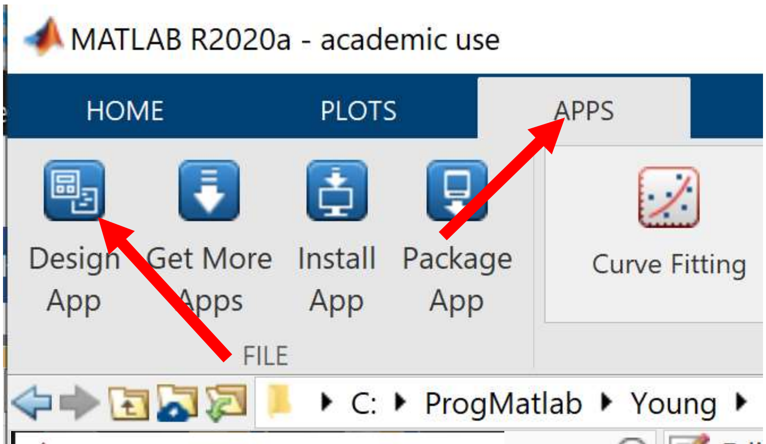
https://es.mathworks.com/academia/tah-support-program/eligibility.html



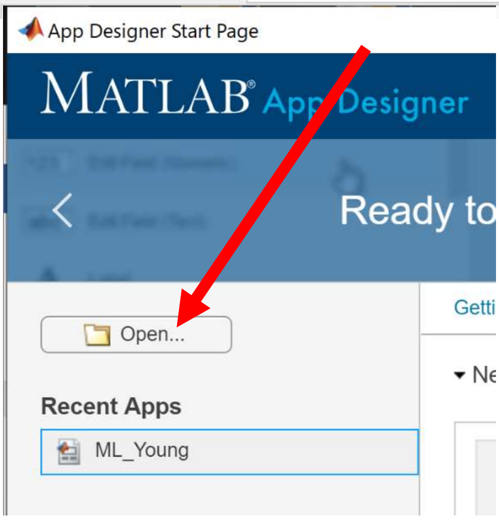
Tenéis que poner vuestro e-mail de la universidad. Una vez descargado e instalado lanzad Matlab. Cuando se abra, seleccionad la carpeta donde tengáis el applet

Podéis instalar la aplicación de la manera siguiente: Lanzad Matlab. En la ventana principal "clickead" el botón "Install App" en el cuadro de diálogo que sale seleccionad "Young Interferometer.mlappinstall" y seguid las indicaciones. Aparecerá en la lista de Aplicaciones. Para lanzarla pulsad en el icono correspondiente.

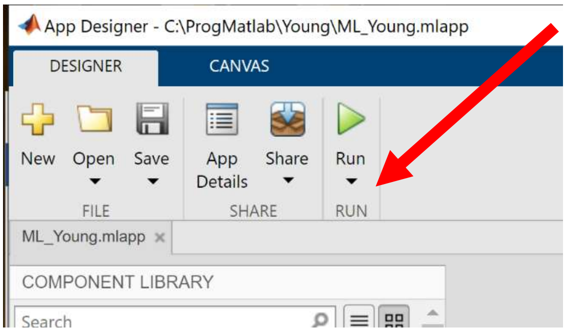
También podéis utilizar el fichero con el código fuente. Copiad el fichero "AppOsciladorForzado.mlapp" en una carpeta



A continuación, seleccionad la pestaña "APPS" y lanzad el diseñador de aplicaciones pulsando el botón "Design App"



Cuando se abra el diseñador de aplicaciones, abrid el programa correspondiente al applet, en este caso "AppOsciladorForzado.mlapp"



Una vez que se haya cargado el código, y se active el botón “RUN”, pulsad el botón “RUN” para lanzar el programa

4 INTERFAZ CON EL USUARIO

Al lanzar el programa aparece la siguiente ventana (ver Figura 4-1)

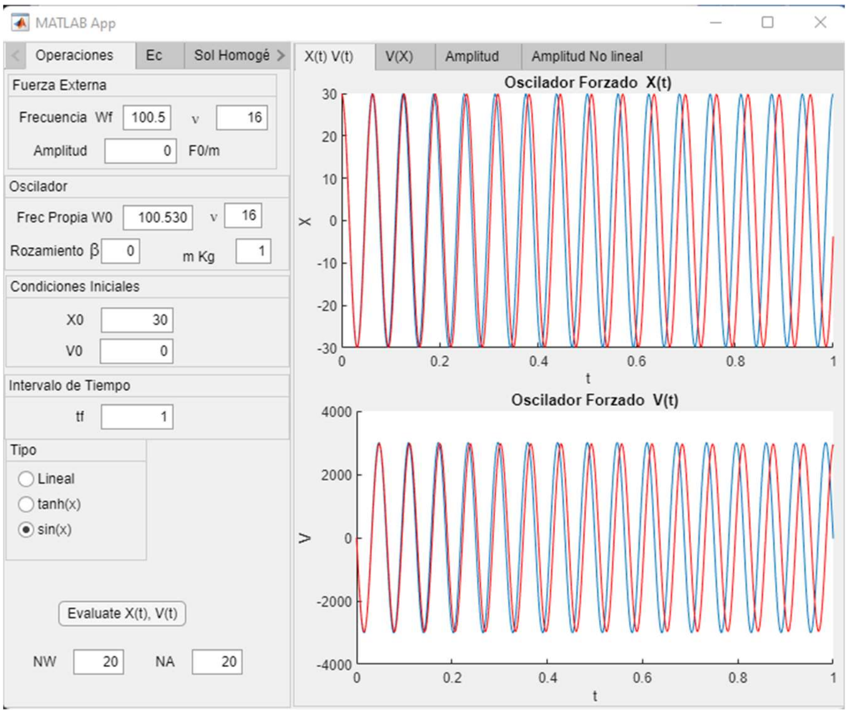
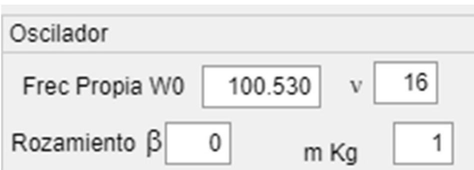


Figura 4-1 Ventana inicial del programa

En la parte de la izquierda están los parámetros que se pueden variar y el botón que lanza los cálculos. En la parte de la derecha aparecen varias pestañas donde se irán mostrando los diferentes resultados

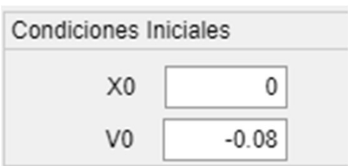
4.1 PARÁMETROS DE ENTRADA

En la parte izquierda, en la pestaña "Operaciones" se pueden modificar los parámetros que definirán el problema a resolver

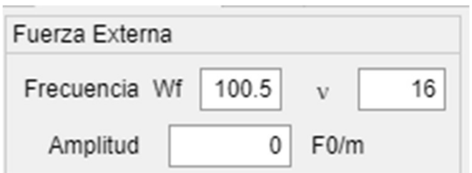


En el bloque "Oscilador" se definiría el oscilador harmónico inicial: Frecuencia propia (Wo frecuencia angular, ó v frecuencia temporal), factores de amortiguamiento y masa (para el cálculo de la potencia absorbida.

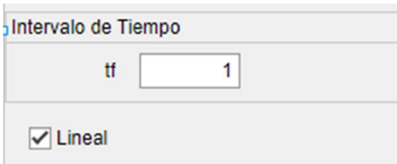
Si la fuerza de rozamiento es cero se resolverá el oscilador armónico simple (Si fuerza externa = 0)



En el bloque "Condiciones iniciales" se dan la posición y velocidad iniciales.



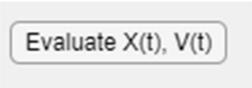
En el bloque "Fuerza Externa" se da la frecuencia angular o temporal y la amplitud dividida por la masa de esta fuerza. Se puede poner que la amplitud sea 0, para no forzar al oscilador.

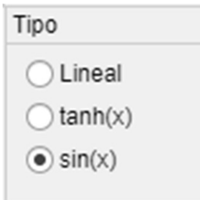


La “trayectoria” posición y velocidad en función del tiempo se calcula desde t=0 hasta t=tf

Si se selecciona la caja “Lineal” se resuelve el oscilador lineal, si no, el oscilador no lineal

4.2 RESULTADOS





Al pulsar este botón se calculan los resultados del oscilador considerado que se mostrarán en las pestañas de la parte de la derecha. Se pueden elegir tres tipos de oscilador: Lineal, no lineal con la fuerza proporcional a la tangente hiperbólica, o no lineal con la fuerza recuperadora proporcional al seno de la posición angular.

4.2.1 Oscilador armónico simple

Si se seleccionan el oscilador lineal con los siguientes parámetros (sin rozamiento y sin fuerza externa) se obtiene un oscilador armónico simple para el caso lineal

Wf	F0/m	W0	β	M	X0	V0	Tf	NW	NA
100	0	100	0	1	0	-0.08	1	20	20

Los resultados de X(t) y de V(t) se muestran en la Figura 4-3, y en el espacio de fases V(X) se obtiene la figura Figura 4-2 que se corresponde con una elipse

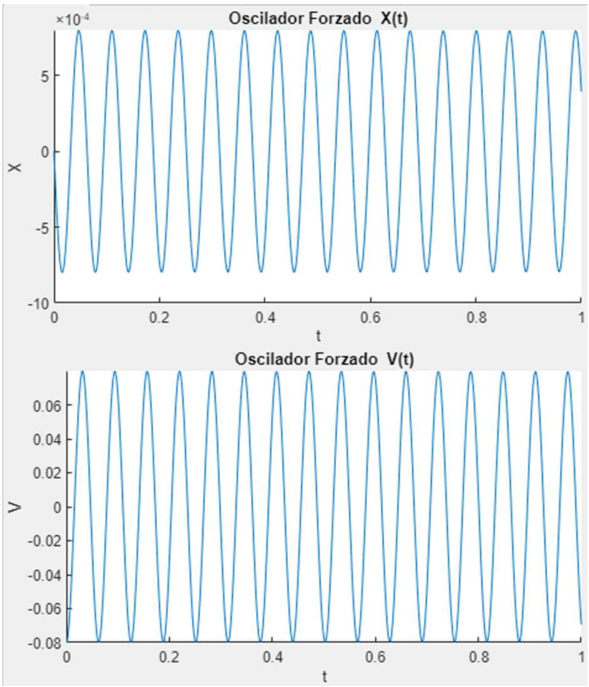


Figura 4-3. Posición y velocidad en función del tiempo para un oscilador armónico simple lineal

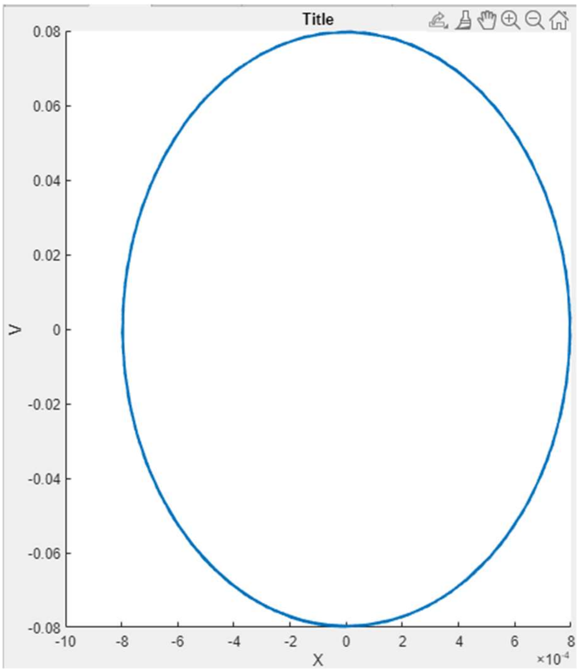


Figura 4-2. Velocidad en función de la posición

Comprobad que el periodo de las oscilaciones es el correspondiente a la frecuencia propia del oscilador.

En el caso de un oscilador no lineal, tipo tanh(x), por ejemplo,

Wf	F0/m	W0	β	M	X0	V0	Tf	NW	NA
100	0	1	0	1	10	-0.08	50	20	20

Se obtienen las figuras Figura 4-5 y Figura 4-4

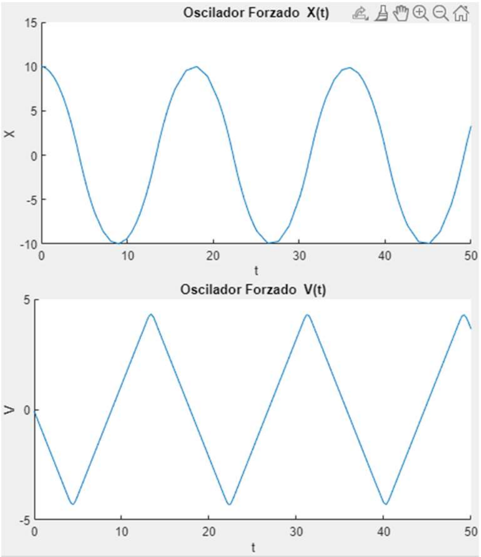


Figura 4-5. Posición y velocidad en función del tiempo para un oscilador no lineal (no forzado y sin rozamiento. El movimiento es periódico, pero no armónico

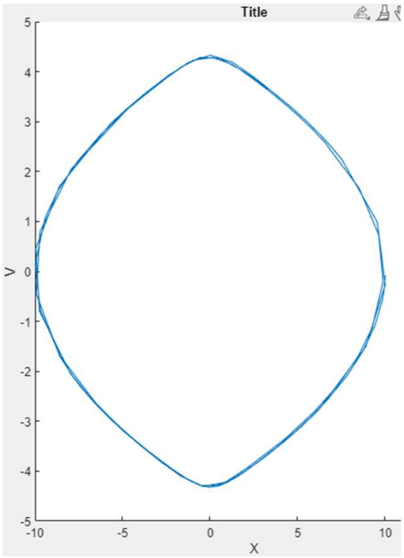


Figura 4-4. Velocidad en función de la posición. La gráfica ya no se corresponde a una elipse. Se ha deformado

Y en el caso de un oscilador no lineal tipo sin(x), notad que x ahora significa el ángulo en grados

Wf	F0/m	W0	β	M	X0	V0	Tf	NW	NA
100	0	100	0	1	30	0	1	20	20

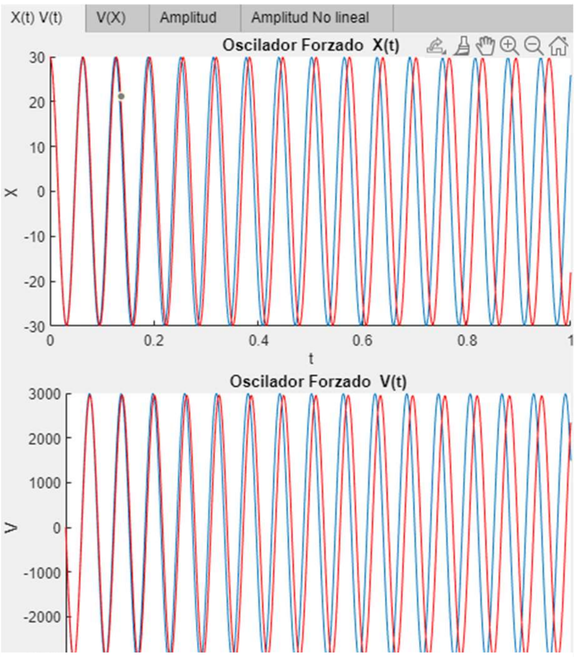


Figura 4-6. Oscilador lineal y oscilador no lineal del tipo sin(x)

Se obtiene la figura de la izquierda. En azul se representa el oscilador lineal con los mismos parámetros y en rojo el oscilador sin(x). Notad como al ir aumentando X0, el periodo se va haciendo más diferente.

4.2.2 Oscilador amortiguado

Wf	F0/m	W0	β	M	X0	V0	Tf	NW	NA
100	0	1	0.02	1	10	-0.08	100	20	20

Para el caso lineal, se obtienen los siguientes resultados. (Figura 4-7 y Figura 4-8) Se ve cómo la amplitud de la vibración se va amortiguando. Si la amortiguación fuera muy débil, la trayectoria V(X) serían casi elipses.

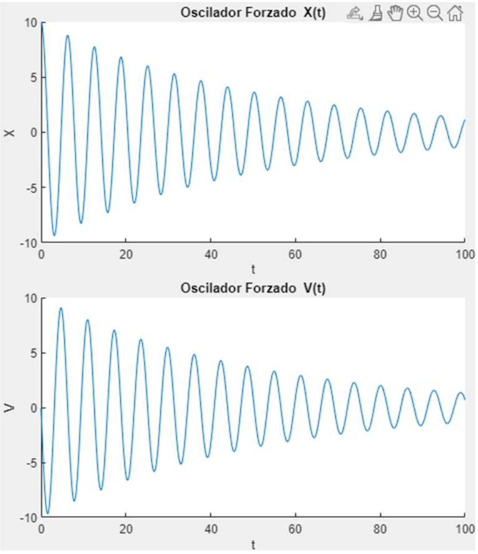


Figura 4-7. Oscilador lineal amortiguado

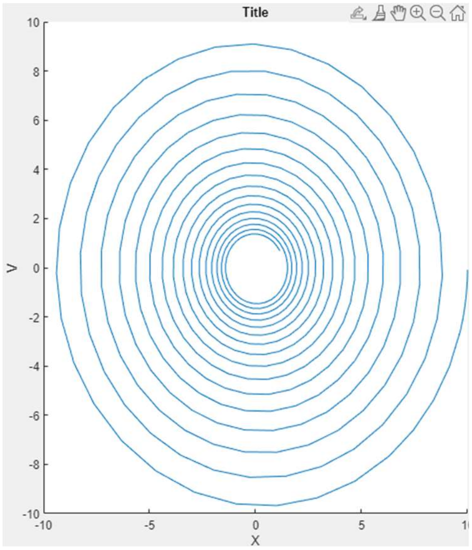


Figura 4-8. Oscilador lineal amortiguado. Las rayectorias son casi elipses

Para el caso no lineal, con los parámetros de la tabla, se obtienen los resultados de las figuras Figura 4-9Figura 4-10

Wf	F0/m	W0	β	M	X0	V0	Tf	NW	NA
100	0	1	0.02	1	10	-0.08	100	20	20

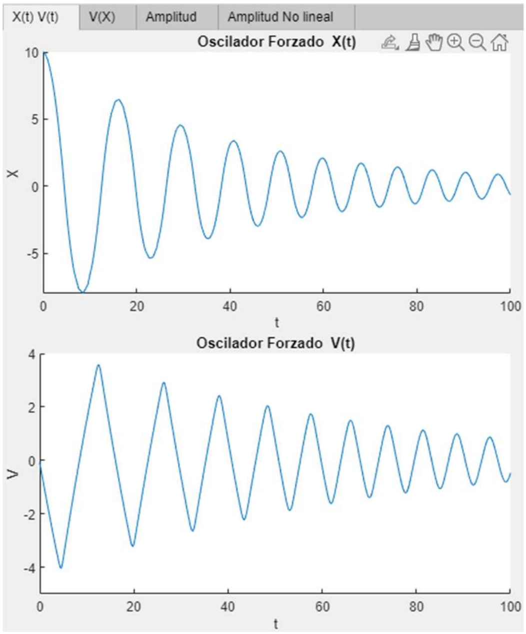


Figura 4-9. Oscilador amortiguado no lineal

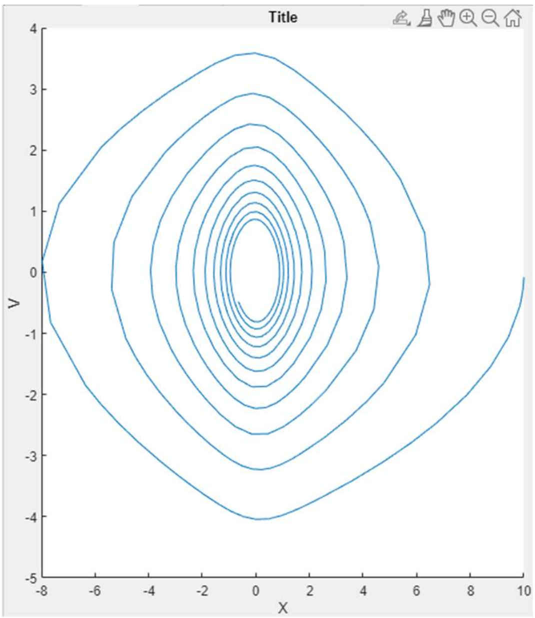


Figura 4-10. Oscilador amortiguado no lineal

4.2.3 Oscilador amortiguado y forzado

Para el caso lineal con los siguientes parámetros

Wf	F0/m	W0	β	m	X0	V0	Tf	NW	NA
100	1	100	1	1	0	-0.08	3	20	20

Se obtienen los siguientes resultados (Figura 4-11 y Figura 4-12). Se observa que después de un cierto tiempo (transitorio) se llega al estado estacionario

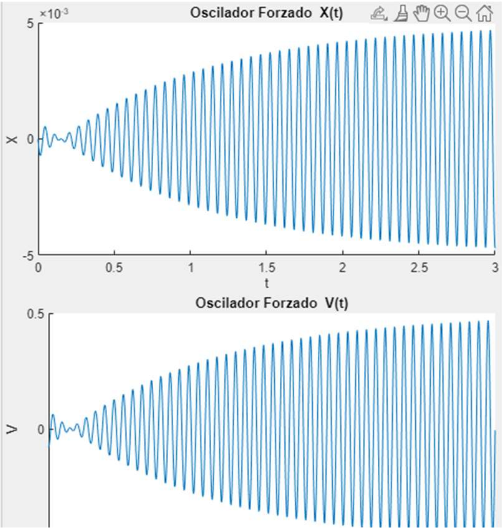


Figura 4-11. Oscilador amortiguado y forzado lineal

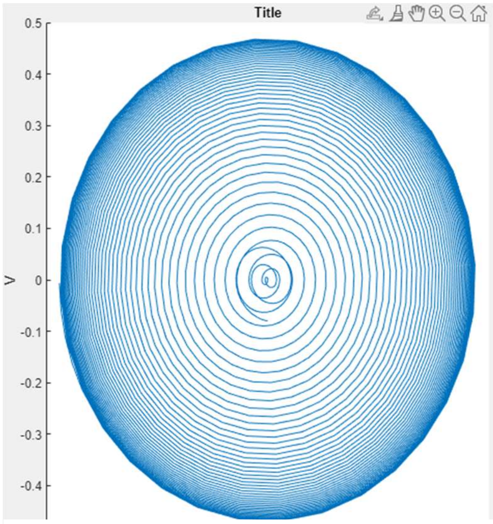


Figura 4-12. Oscilador amortiguado y forzado lineal

En las gráficas de la pestaña "Amplitud" se puede ver la amplitud del estado estacionario en función de la frecuencia de la fuerza externa, también cuál es la potencia suministrada, en el estado estacionario en función de la frecuencia de la fuerza externa.

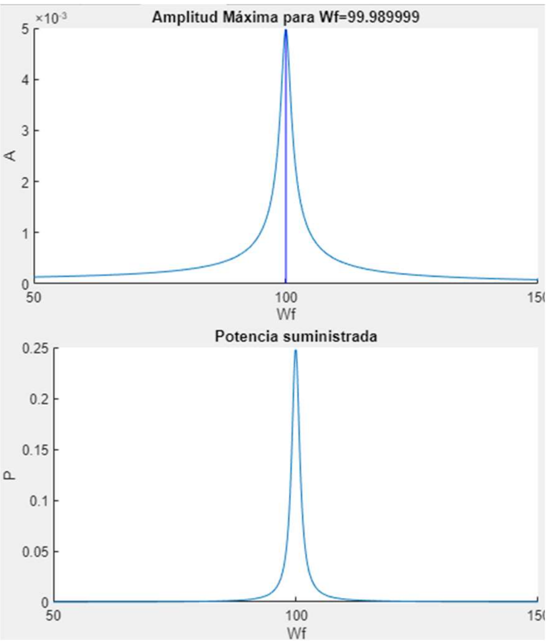


Figura 4-13. Amplitud (A) y potencia (P) suministrada en el estado estacionario en función de la frecuencia de la fuerza externa

Para el caso no lineal con los siguientes parámetros

Wf	F0/m	W0	β	m	X0	V0	Tf	NW	NA
0.6	2	3	0.01	1	0.4	0	100	20	20

Se obtienen los siguientes resultados, que pueden ser muy "caóticos"

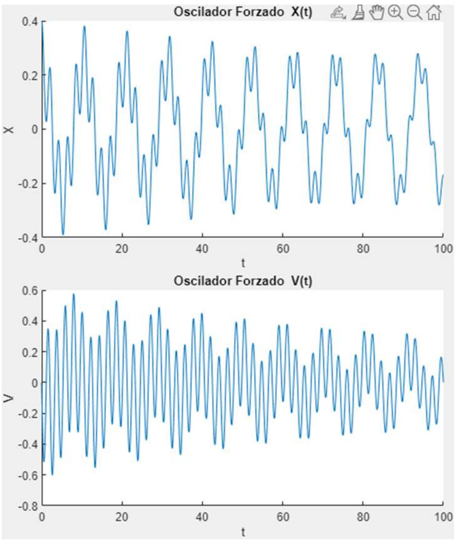


Figura 4-14. Oscilador amortiguado y forzano no lineal

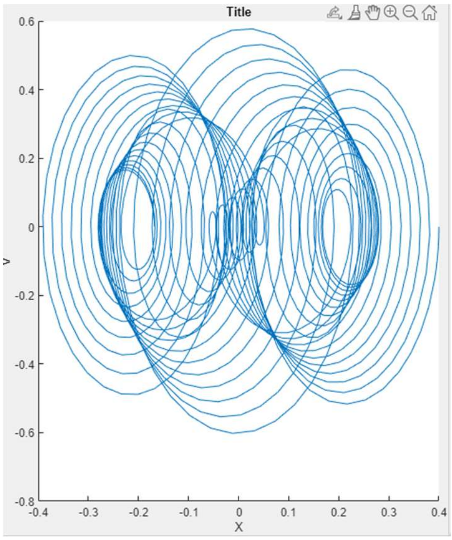


Figura 4-15. Oscilador amortiguado y forzano no lineal